Τρίτη 2:30 Λέσχη Καθηγητών.

07/04/2016

Υπενθ/Ορισμός

V δ.χ επί του $\mathbb{R}$, $\langle\, , \rangle \quad V \times V \to \mathbb{R}$

Εσωτερικό γινόμενο

Για $v \in V$ ορίσαμε το μήκος του V

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

π.χ

Μήκος καμπύλης στον $V = \mathbb{R}^n$ με το συνήθες (ή κανονικό) εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ορ.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$

(π.χ $\gamma(t) = (t, t^2, t^5) \in \mathbb{R}^3$)

Υποθέτουμε (γ) παραγωγίσιμη στο (a, b) με συνεχή παράγωγο.

Ορίζουμε

$$\text{Μήκος}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

παράγωγος

όπου $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$, $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ και $\langle\, ,\rangle$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

Π.χ.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ η καμπύλη με $\gamma(t) = \left(t, \frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \frac{t^3}{3}\right)$.

Η $\gamma(t)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (Υ). Έχουμε

$\gamma'(t) = (1, \sqrt{2} t, t^2)$,

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2}t)^2 + (t^2)^2} = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} =$
$= \sqrt{(1+t^2)^2} = (1+t^2)$

Άρα Μήκος $(\gamma) = \int_a^b (1+t^2)\, dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_a^b =$
$= b + \frac{b^3}{3} - a - \frac{a^3}{3}$

Πρόταση: (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω $(V, \langle\, ,\rangle)$ ευκλείδιος χώρος (δηλ. χώρος εσωτερικού γινομένου) και $u, w \in V$. Τότε
$|\langle u, w\rangle| \le \|u\| \|w\|$ (*)

Απόδειξη

Αν $u = 0_V$. Τότε αφού η $\langle \cdot, w\rangle : V \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική έχουμε $\langle u, w\rangle =$
$= \langle 0_V, w\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ επίσης
$\|u\| = \|0_V\| = 0_{\mathbb{R}}$. Άρα η (*) ισχύει.

Υποθέτουμε $u \neq 0_V$. Θέτουμε $z = u - \frac{\langle u, w\rangle}{\|w\|^2} w$

Τότε $0 \leq \langle z, z \rangle$

$$= \left\langle u - \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} w,\ u - \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle =$$

$$= \langle u,u\rangle - \left\langle u, \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle =$$

$$- \left\langle \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} w, u \right\rangle + \left\langle \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} w, \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle - \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} \langle u,w\rangle - \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} \langle u,w\rangle \ (u,w \in \mathbb{R})$$

$$+ \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} \cdot \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|^2} \langle w,w\rangle =$$

$$= \langle u,u\rangle - 2\frac{\langle u,w\rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle u,w\rangle^2}{\|w\|^2} =$$

$$= \langle u,u\rangle - \frac{\langle u,w\rangle^2}{\|w\|^2} = \frac{\|u\|^2\|w\|^2 - \langle u,w\rangle}{\|w\|^2}$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω V ευκλείδιος χώρος και $u, w \in V$ μη μηδενικά.
Από ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$-1 \leq \frac{\langle u,w\rangle}{\|u\|\|w\|} \leq 1$$

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $\theta \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \theta \leq \pi$ ώστε $\cos\theta = \frac{\langle u,w\rangle}{\|u\|\|w\|}$. Λέμε ότι θ είναι η γωνία μεταξύ των u, w

(παρατήρηση: χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα από (ανάλυση) ότι η απεικόνιση
$\cos\theta : [0,\pi] \to [-1,1]$ είναι 1-1 και επί)

Παρατήρηση. Αν $V = \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες (ή κανονικό) εσωτ. γινόμενο, τότε η έννοια της γωνίας που ορίσαμε ταιριάζει με την "φυσική έννοια γωνίας"

Ορισμός

Τα $u, w \in V$ λέγονται κάθετα (ή ορθογώνια) αν $\langle u, w\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ (όταν $u \neq 0_V$ και $w \neq 0_V$) όταν η γωνία θ μεταξύ τους είναι ίση με $\frac{\pi}{2}$

Παρατήρηση

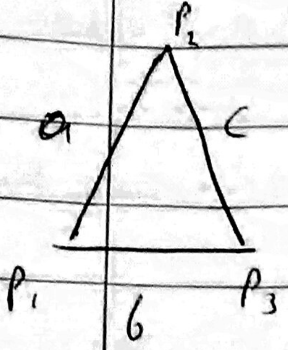
Αν $v = 0_V$ είδαμε ότι $\langle u, w\rangle = 0$ $\forall$ $w \in V$. Άρα το μηδενικό διάνυσμα είναι κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

Π.χ. Έστω $V = \mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτ. γινόμενο. Να βρεθεί η γωνία των $u = (0,5,0)$, $w = (3,3,0)$.

Λύση: Έχουμε $(**)$ $\cos\theta = \dfrac{\langle u, w\rangle}{\|u\|\,\|w\|} =$

$$\frac{0\cdot 3 + 5\cdot 3 + 0\cdot 0}{\sqrt{\langle u,u\rangle}\cdot\sqrt{\langle w,w\rangle}} = \frac{15}{\sqrt{0^2+5^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+0}} =$$

$$= \frac{15}{5\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left.\begin{array}{l}\text{και } 0 \le \theta \le \pi \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$



$a \le b + c$

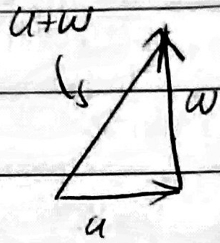
- <u>Κλασική τριγωνική ανισότητα</u>

Αν έχουμε ένα τρίγωνο το μήκος οποιασδήποτε πλευράς είναι (γνήσια) μικρότερο του αθροίσματος των μηκών των άλλων δύο πλευρών

$\|u+w\| \le \|u\|+\|w\|$

Πρόταση (Τριγωνική ανισότητα). Έστω $(V, +, \cdot)$
$x \in \Gamma$ και $u, w \in V$. Τότε $\|u+w\| \le \|u\|\cdot\|w\|$

?



<u>Απόδειξη</u>

$\|u+w\|^2 = (\sqrt{\langle u+w, u+w \rangle})^2 = \langle u+w, u+w \rangle =$

$= \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle u, w \rangle =$

(Λόγω συμμετρικότητας και διγραμμικότητας του $\langle , \rangle$)

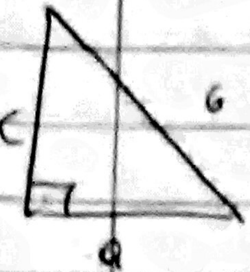
$= \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle u, w \rangle \le \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle u, w \rangle|$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

$\le \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2\|u\|\|w\| = (\|u\| + \|w\|)^2$

Άρα $\|u+w\|, \|u\|, \|w\|$ μη αρνητικά, το αποτέλεσμα έπεται.

Κλασικό Π.Θ.



Π.Θ

$b^2 = a^2 + c^2$

(Πρόταση (Π.Θ), Ισχυρή μορφή)

Έστω $(V, <\,>)$ χ.ε.γ και $u, w \in V$.

Τ.Α.Ε.Ι

i) u, w κάθετα (δηλ. $<u,w> = 0_{\mathbb{R}}$)

ii) $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$

(παρατήρηση: Σαν περίπτωση αν $V = \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο παίρνουμε το κλασσικό Π.Θ)

Απόδ

i) $\Rightarrow$ ii) Υποθέτουμε $<u,w> = 0_{\mathbb{R}}$. Όπως στην προηγούμενη απόδ. $\|u+w\|^2 = <u+w, u+w> =$
$= <u,u> + <w,w> + 2<u,w> = \|u\|^2 + \|w\|^2$

ii) $\Rightarrow$ i) Υποθέτουμε $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$

Έχουμε $\|u+w\|^2 = <u+w, u+w> =$
$= <u,u> + <w,w> + 2<u,w> =$
$= \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2<u,w>$

Άρα $2<u,w> = \|u+w\|^2 - \|u\|^2 - \|w\|^2 = 0_{\mathbb{R}}$ από υπόθεση. Άρα $<u,w> = 0_{\mathbb{R}}$

Π.χ

(Ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^{v\times v}$)

(Υπενθ. Αν $A \in \mathbb{F}^{v\times v}$, $Tr(A)$ = άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A.

ίχνος του A

π.χ. Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ τοτε $tr A = 3+2=5$

Εστω $V = \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$. Για $A \in V$ συμβολιζουμε A^t τον ανάστροφο του A.

Ορίζουμε $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ως εξής

$\langle A, B \rangle = Tr(B^t A)$

Ισχυρισμός $\langle , \rangle$ εσωτ. γινόμενο στο V

$\boxed{\checkmark}$ • Συμμετρικότητα $\langle A, B \rangle = Tr(B^t A)$

$\langle B, A \rangle = Tr(A^t B) = Tr((B^t A)^t) =$

(Υπενθ. $(C \cdot D^t) = D^t C^t$) $= Tr(B^t A)$ γιατί αν $D \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$ ο D και ο D^t έχουν τα ίδια στοιχεία στη κύρια διαγώνιο άρα $Tr(D) = Tr(D^t)$

$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$

Άρα $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle , \rangle$ συμμετρικό.

$\boxed{\checkmark}$ • Διγραμμικότητα : Φανερά $Tr(D_1 + D_2) = Tr(D_1) + Tr(D_2)$

$Tr(\lambda D) = \lambda Tr(D)$

Άρα $\langle A, B + B' \rangle = Tr((B+B')^t A) =$

$= Tr((B^t + (B')^t) A) =$

$= Tr(B^t A + (B')^t A) = Tr(B^t A) + Tr((B')^t A) =$

$= \langle A, B \rangle + \langle A, B' \rangle$

Ομοίως για $\lambda \in \mathbb{R}$ $\langle A, \lambda B \rangle = Tr((\lambda B)^t A) =$

$= Tr(\lambda B^t A) = \lambda Tr(B^t A) = \lambda \langle A, B \rangle$

Λόγω της συμμετρικότητας $\Rightarrow \langle , \rangle$ διγραμμικό

$\square$ • Θετικά Ορισμένο. Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ θ.δ.ο

$<A,A> \geq 0_{\mathbb{R}}$ και ότι $<A,A> = 0$ αν και μόνο αν $A = 0_\nu = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

Έστω $A = [a_{ij}]$ θ.δ.ο $Tr(A^tA) \geq 0$ και ότι $Tr(A^tA) = 0_{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $A = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

Θέτουμε $B = A^tA = [b_{ij}]$. Για b_{11} έχουμε:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & * \\ \vdots & \\ a_{\nu 1} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{\nu 1} \\ * \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{\nu 1}^2 \\ \\ * \\ \\ \end{bmatrix}$$

Συνεπώς $b_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{\nu 1}^2$

παρομοίως βρίσκουμε $b_{ii} = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{\nu i}^2$
$\forall i$ με $1 \leq i \leq \nu$

και συνεπώς $Tr B = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{\nu\nu} = \sum\limits_{i=1}^{\nu}(a_{1i}^2 + \dots + a_{\nu i}^2) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq \nu} a_{ij}^2$

Άρα $Tr B \geq 0_{\mathbb{R}}$ και $Tr B = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_{ij}^2 = 0_{\mathbb{R}}\ \forall i,j \Leftrightarrow A = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

Φυλ #4 (6)

Έστω η απεικόνιση $<,> \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με
$<(a_1,a_2),(b_1,b_2)> = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2$

1) Δ.ο η $<,>$ ορίζει εσωτ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$
2) Βρείτε τα μήκη των διανυσμάτων $(1,0)$ και $(0,1)$ ως προς το $<,>$

3) Είναι τα διανύσματα $u=(1,0)$, $w=(0,1)$ κάθετα ως προς το $<,>$; Αν όχι, βρείτε $\cos\theta$ όπου θ η γωνία των u, w ως προς το $<,>$

<u>Λύση</u>

$<,>$ συμμετρική

$<(b_1,b_2),(a_1,a_2)> =$

$= 5b_1a_1 - 2b_1a_2 - 2b_2a_1 + b_2a_2 =$

$= <(a_1,a_2),(b_1,b_2)>.$

$< >$ διγραμμική

$<(a_1,a_2)(b_1,b_2)+(b_1'+b_2')> =$

$= <(a_1,a_2),(b_1+b_1', b_2+b_2')>$

$= 5a_1(b_1+b_1') - 2a_1(b_2+b_2^2) - 2a_2(b_1+b_1') +$

$+ a_2(b_2+b_2') =$

$= 5a_1b_1 + 5a_1b_1' - 2a_1b_2 - 2a_1b_2^2 - 2a_2b_1 - 2a_2b_1' +$

$+ a_2b_2 + a_2b_2' =$

$= (5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2) +$

$+ (5a_1b_1' - 2a_1b_2' - 2a_2b_1' + a_2b_2') =$

$= <(a_1,a_2),(b_1,b_2)> + <(a_1,a_2),(b_1',b_2')>$

Ομοίως δείχνουμε

$<(a_1,a_2), \lambda(b_1,b_2)> = \lambda <(a_1,a_2),(b_1,b_2)>$ και

λόγω της συμμετρικότητας είναι $<,>$ διγραμμική

$<,>$ θετικά ορισμένη: Έστω $v=(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$

$<v,v> = 5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2$

Έχουμε $\langle v, v \rangle = a_1^2 + (2a_1)^2 - 4a_1a_2 + a_2^2 =$

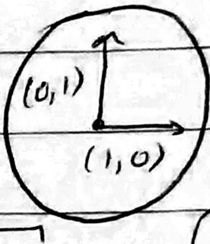
$= a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2$

Άρα $\langle v, v \rangle \geq 0_{\mathbb{R}}$ $\forall$ $v = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$,

και $\langle v, v \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2 = 0_{\mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_1 - a_2 = 0_{\mathbb{R}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0_{\mathbb{R}} \\ a_2 = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$

Άρα $\langle , \rangle$ θετ. ορισμένο.



2) Έστω $u = (0, 1)$

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\langle (1,0), (1,0) \rangle} = \sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1} =$

$= \sqrt{5}$

$w = (0, 1)$

$\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = \sqrt{\langle (0,1), (0,1) \rangle} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1} = 1$

3) Είναι τα u, w κάθετα ως προς τ $\langle \, \rangle$;

Έχουμε $\langle u, w \rangle = \langle (1,0)(0,1) \rangle =$

$= 5 \cdot 10 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -2.$

Άρα u, w δεν είναι κάθετα ως προς $\langle , \rangle$

Έχουμε $\cos\theta = \dfrac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \, \|w\|} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

και με τη βοήθεια ενός Η/Υ βρίσκουμε προσεγγιστικά τη γωνία θ ∇.∇